УДК 517.98 : 536.75

Е.Н. Ломакина,
д-р физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и математических методов в экономике Хабаровского государственного университета экономики и права

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИЙНЫХ ЧИСЕЛ ДИАГОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе получены оценки энтропийных чисел диагонального оператора $D:\ell_p \to \ell_q$, $\{x_i\} \to \{x_i\sigma_i\}$ *в случае* $0 < q < 1 \leq p \leq \infty$.

Ключевые слова: *диагональный оператор, энтропийные числа,* ℓ_p *пространства, пространства Лоренца.*

The article examines the asymptotic behavior of entropy numbers of diagonal operator $D:\ell_p \to \ell_q$, $\{x_i\} \to \{x_i\sigma_i\}$ *in the case* $0 < q < 1 \leq p \leq \infty$.

Keywords: *diagonal operator, entropy numbers,* ℓ_p *spaces, Lorentz spaces.*

Обозначим $\mathfrak{B}(X,Y)$ – пространство всех линейных, ограниченных операторов действующих из банахова пространства X в $q-$банахово пространство Y, где $0 < q \leq 1$ и неравенство треугольника имеет вид $\|x+y\|_Y^q \leq \|x\|_Y^q + \|y\|_Y^q$ для всех $x, y \in Y$. Важной характеристикой компактности оператора $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ являются его энтропийные числа. Для $n \in \mathbb{N}$, n - энтропийное *число* $e_n(T)$ оператора $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ определяется как точная нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon \geq 0$, для которых существуют элементы $y_1, y_2, \dots, y_{2^{n-1}} \in Y$ такие, что образ замкнутого единичного шара B_X

$T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \{y_j + \varepsilon B_Y\}$,

где B_Y – замкнутый единичный шар в Y. Энтропийные числа для операторов в $q-$банаховых пространствах обладают следующими свойствами [1], [2]:

для $S, T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ и $R \in \mathfrak{B}(Y,Z)$

(i) $\|T\| \geq e_1(T) \geq e_2(T) \geq \dots \geq 0$;

(ii) $e_{n+m-1}(RT) \leq e_n(T) \cdot e_m(S), \quad n, m \in \mathbb{N}$;

$$\text{(iii)}\, e^q_{n+m-1}(T+S) \le e^q_n(T) + e^q_m(S), \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

В данной статье получены оценки энтропийных чисел диагональных операторов: $D: \ell_p \to \ell_q$, $\{x_i\} \to \{x_i\sigma_i\}$ в случае $0 < q < 1 \le p \le \infty$.

Пусть $0 < q \le \infty$. Множество ℓ_q всех последовательностей $x = \{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых конечна квазинорма

$$\|x\|_{\ell_q} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{1/q}, & q < \infty \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, & q = \infty \end{cases}$$

образует квазибанахово пространство, в случае же $q \ge 1$, ℓ_q – банахово пространство.

Пусть $x = \{x_k\}$ – ограниченная последовательность, положим,

$$s_n(x) = \inf\{\tau \ge 0 \;:\; card(k : |x_k| \ge \tau) < n\}.$$

В случае $|x_1| \ge |x_2| \ge \cdots \ge 0$ получаем, что $s_n(x) = |x_n|$. Ясно, что $s_{n+1}(x) \le s_n(x)$. Последовательность $\{s_n(x)\}$ называют невозрастающей перестановкой $x = \{x_k\}$.

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Пространство Лоренца $\ell_{p,q}$ состоит из всех последовательностей $x = \{x_n\}$, имеющих конечную квазинорму

$$\|x\|_{\ell_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} s_n(x)\right)^q\right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup\limits_{1 \le n < \infty} n^{\frac{1}{p}} s_n(x), & q = \infty. \end{cases}$$

При $p = q$ получаем $\ell_{q,q} = \ell_q$.

Для пространств Лоренца справедливы следующие вложения [Leoni]:

1) $\ell_{p,q_1} \subset \ell_{p,q_2}$, если $0 < p \le \infty$, $0 < q_1 < q_2 \le \infty$ и
2) $\ell_{p_1,q_1} \subset \ell_{p_2,q_2}$, если $0 < p_1 < p_2 \le \infty$, $0 < q_1, q_2 \le \infty$.

Лемма 1. [Пич] *Пусть E_n -- n – мерное вещественное банахово пространство. Тогда*

$$e_k(I_n : E_n \to E_n) \le 4 \cdot 2^{-(k-1)/n}. \qquad (1)$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha < \infty,\ 0 < \beta \le \infty$, E_n -- n *– мерное вещественное банахово пространство и тождественный оператор* $I_n : E_n \to E_n$. *Тогда*

$$\|\{e_k(I_n : E_n \to E_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le C n^{1/\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где положительная константа C *зависит только от* α *и* β:

$$C = \begin{cases} \left(\dfrac{4^\beta}{\beta}(\alpha + 2^\beta)\right)^{1/\beta}, & 0 < \beta \le \alpha < \infty, \\ \dfrac{8}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}, & 0 < \alpha < \beta \le \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $0 < \beta \le \alpha < \infty$.

Используя оценку леммы 1, получаем

$$\|\{e_k(I_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}}^\beta = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} e_k^\beta(I_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} 4^\beta k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)}$$

$$= 4^\beta \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right)$$

$$\le 4^\beta \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right)$$

$$\le 4^\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right)$$

$$\le 4^\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + n^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{\beta}{n}}\right)^k \right)$$

$$\le 4^\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + n^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \frac{1}{1-2^{-\beta/n}} \right) \le \frac{4^\beta}{\beta} (\alpha + 2^\beta) n^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} e_k(I_n) \right)^\beta \le \frac{4^\beta}{\beta} (\alpha + 2^\beta) n^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

что приводит к оценке

$$\|\{e_k(I_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le \left(\frac{4^\beta}{\beta}\left(\alpha + 2^\beta\right)\right)^{1/\beta} n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta \le \infty$, тогда $\ell_{\alpha,\alpha} \subset \ell_{\alpha,\beta}$ и $\|\{e_k(I_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le \|\{e_k(I_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\alpha}}$.

$$\|\{e_k(I_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^\alpha(I_n) \le\right)^{1/\alpha} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^\alpha 2^{-\alpha(k-1)/n}\right)^{1/\alpha}$$

$$\le 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{-\frac{\alpha}{n}}\right)^{(k-1)}\right)^{1/\alpha} \le 4\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 4\left(\frac{2^{\frac{\alpha}{n}}}{2^{\frac{\alpha}{n}}-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\le 4\left(\frac{2^{\frac{\alpha}{n}}}{\frac{\alpha}{n}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{8}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < \alpha < \infty,\ 0 < \beta \le \infty.$ *Тогда*

$$\left\|\left\{e_k\left(I_n : \ell_p^n \to \ell_q^n\right)\right\}\right\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le Cn^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C – положительная константа из леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 для действующего в n-мерном банаховом пространстве оператора $I_n : \ell_p^n \to \ell_p^n$ имеем

$$\left\|\left\{e_k\left(I_n : \ell_p^n \to \ell_p^n\right)\right\}\right\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le Cn^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Зададим операторы вложения $I_n^1 : \ell_p^n \to \ell_p^n$, $I_n^2 : \ell_p^n \to \ell_q^n$ и положим $I_n = I_n^2 I_n^1$. По свойству энтропийных чисел $e_k\left(I_n : \ell_p^n \to \ell_p^n\right) \le \left\|I_n^2 : \ell_p^n \to \ell_q^n\right\| \cdot e_k(I_n^1 : \ell_p^n \to \ell_p^n)$. Применяем неравенство Гельдера с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$ и лемму 2, получаем

$$\left\|\left\{e_k\left(I_n : \ell_p^n \to \ell_p^n\right)\right\}\right\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \le \left\|\left\{e_k\left(I_n^1 : \ell_p^n \to \ell_p^n\right)\right\}\right\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \cdot \left\|I_n^2 : \ell_p^n \to \ell_q^n\right\| \le Cn^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Далее рассмотрим диагональный оператор $D: l_p \to l_q$, $0 < q < 1 \le p \le \infty$, который порождается последовательностью $\{\sigma_i\}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$,

$$D\{x_i\} = \{x_i\sigma_i\}, \quad \{x_i\} \in l_p. \qquad (2)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \cdots > 0.$$

Определим канонические операторы $J_n \in \mathcal{B}(\ell_p^n, l_p)$, $Q_n \in \mathcal{B}(l_q, \ell_p^n)$, согласно формулам

$$J_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots)$$
$$Q_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, \dots, x_n)$$

и положим

$$W_n = Q_n D J_n.$$

Очевидно, что $\|J_n\| = \|Q_n\| = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \gamma \leq \infty$ *и* $\frac{1}{r} = \gamma - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Тогда для оператора (2) *выполняется оценка*

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{\gamma - \frac{1}{q}} e_n(D). \qquad (3)$$

В частности, при $\gamma = 1$ *неравенство* (3) *имеет вид*

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{\frac{1}{q}} e_n(D). \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим оператор тождественного вложения $I_n : \ell_\infty^n \to \ell_1^n$ и представим его в виде композиции следующих отображений:

$$I_n : \ell_\infty^n \xrightarrow{I_n} \ell_p^n \xrightarrow{W_n} \ell_p^n \xrightarrow{J_n} l_p \xrightarrow{D} l_q \xrightarrow{Q_n} \ell_q^n \xrightarrow{I_n} \ell_1^n,$$

где $W_n : \ell_p^n \to \ell_p^n$ определяется формулой

$$W_n\{x_i\}_{i=1}^n = \{\sigma_i^{-1} x_i\}_{i=1}^n.$$

Поскольку $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \cdots |\sigma_n| > 0$, то выполнена оценка $\|W_n\| \leq |\sigma_n|^{-1}$.

Известно (см. [1] 12.2.1), что

$$e_n(I_n : \ell_\infty^n \to \ell_1^n) \geq \frac{1}{6}n. \qquad (5)$$

Из неравенства Йенсена (поскольку $q < 1$) следует, что $\|I_n : \ell_q^n \to \ell_1^n\| \leq 1$,

а также прямое вычисление влечёт $\|I_n : \ell_q^n \to \ell_1^n\| = n^{\frac{1}{p}}$.

Используя неравенство (5) и мультипликативность энтропийных чисел, имеем

$$\frac{1}{6}n \leq e_n(I_n : \ell_\infty^n \to \ell_1^n) = e_n(I_n Q_n D J_n W_n I_n)$$
$$\leq e_n(I_n Q_n D J_n : \ell_p^n \to \ell_1^n) \cdot \| W_n I_n : \ell_\infty^n \to \ell_p^n\|$$
$$\leq \|I_n : \ell_q^n \to \ell_1^n\| \cdot \| Q_n\| \cdot e_n(D) \cdot \| J_n\| \cdot \| I_n : \ell_\infty^n \to \ell_p^n\| \cdot \| W_n\|$$
$$\leq e_n(D) n^{1/p} |\sigma_n|^{-1}.$$

Следовательно,

$$|\sigma_n| \leq 6 e_n(D) n^{\frac{1}{p}-1}.$$

Далее, умножая полученное неравенство на $n^{1/r}$, получаем

$$n^{\frac{1}{r}}|\sigma_n| \leq 6n^{\frac{1}{p}-1+\frac{1}{r}} e_n(D) = 6n^{\gamma-1/q'} e_n(D) \leq 6 \sup_n n^{\gamma-\frac{1}{q}} e_n(D).$$

Отсюда

$$\sup_n n^{\frac{1}{r}}|\sigma_n| \leq 6 \sup_n n^{\gamma-\frac{1}{q}} e_n(D),$$

что в результате даёт требуемую оценку

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{\gamma-\frac{1}{q}} e_n(D).$$

Список использованных источников

1 Пич А. Операторные идеалы / А. Пич. М. : Мир, 1982.

2 Edmunds D. E., Triebel H. Function spaces, entropy number, differential operators.

Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 120, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

3 B. Carl. Entropy numbers of diagonal operators with an application to eigenvalue problems.

4 Approx J. Theory 32 (1981), no. 2, 135–150.